MA1 – další řešené příklady výpočtu neurčitých integrálů

(1.) Věta o substituci v neurčitém integrálu – užití „opačné“ (tj. 2VS)

1. $I=\int \sqrt{1-x^2}\,dx$, $x\in(-1,1)$: „rada“ v literatuře (a na přednášce)

substituce : $x=\sin t$ $(\equiv \varphi(t))$, $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, pak
$t=\arcsin x$ $(\equiv \varphi^{-1}(x))$, $x\in(-1,1)$

a když $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, pak funkce
$f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)=\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t$ v $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

a hledáme (dle věty) $\int\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt=\int\cos^2 t\,dt=$ „známe“ (např.)
(díky $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ je $\sqrt{1-\sin^2 t}=\cos t>0$)

$$=\int\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=\frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)=\frac{1}{2}(t+\sin t\cdot\cos t)+c$$
$\equiv G(t)$ (dle věty)

Pak $I=G(\varphi^{-1}(x))$, tj. $t=\varphi^{-1}(x)=\arcsin x$

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\Big(\arcsin x+\underbrace{\sin(\arcsin x)}_{=x}\cdot\underbrace{\cos(\arcsin x)}_{=\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}}\Big)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\arcsin x+x\cdot\sqrt{1-x^2}\right)+c$$

$c\in\mathbb{R}$, $x\in(-1,1)$

(tento integrál byl „úkolem“ pro cvičení (z přednášky))

Ještě poznámka k substituci v 1. příkladu:

substituce, které se užívají v opačném smyslu – viz příručka (2VS) – jsou většinou „chytré" nápady, jak získat funkci $G(t)$, primitivní k $f(g(t)).g'(t)$ (substituce $x = g(t)$) –

– zde je substituce $x = \sin t$ asi zvolená proto, že se v integrálu zbavíme „$\sqrt{\cdot}$", což je „nebezpečná" funkce, není-li vnitřní funkcí jinou, než lineární; a zde tedy potřebujeme pro $\sqrt{1-x^2} = y$, tj. $x^2+y^2=1$ – a jsme „na kružnici" – a tam volíme goniometrickou funkci:

$x = \sin t$, $1-x^2 = 1-\sin^2 t = \cos^2 t$ – a spolu s volbou $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ už máme splněné přání: $\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$.

2. (integrál oblíbený, na většinách „tabulkách" primitivních funkcí se vyskytující)

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \qquad - \text{ existuje v } R;$$

návrh substituce: $x = \sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$

(opět šikovné, neboť, je-li $\cosh t = \dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$, platí $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, tedy opět tato substituce pomůže k „likvidaci" $\sqrt{}$.

tedy: $x = \sinh t$ $(\equiv \varphi(t))$, $t \in R$ $\quad \left((\sinh t)' = \cosh t > 0 \text{ v } R \Rightarrow\right.$ $\Rightarrow \sinh t = \varphi(t)$ je fce rostoucí v R a má inverzní v R $\left.\varphi(R) = R\right)$

a $\varphi^{-1}(x) = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$, $x\in R$ (příklad z našich prvních cvičení);

tedy jsou splněny předpoklady „opačného směru" užití substituce:

je-li $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, pak $f(\varphi(t)) = \dfrac{1}{\cosh t}$,

$$\varphi'(t) = \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)' = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \cosh t \text{ , tedy}$$

$$\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = \int \frac{1}{\cosh t}\cdot \cosh t\,dt = \int 1\,dt = t + C,$$

(zde je vidět „dokonalost" substituce)

a pak (dle věty) $\left(t = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)$:

$$\underline{\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + C,\quad x\in R,\ C\in R}$$

Tento integrál lze řešit ještě jinými „chytrými" substitucemi –
– ukážu ještě jednu (zvanou Eulerova) (pro „zájemce")

Položí se $\sqrt{1+x^2} = t - x \Rightarrow t = x + \sqrt{1+x^2}$, $x\in R$,
pak $t\in(0,+\infty)$
(tj. $\varphi^{-1}(x) = x+\sqrt{1+x^2}$)

a ještě „potřebujeme"
„substituci" $x=\varphi(t)$: je-li $\sqrt{1+x^2} = t - x$, pak
$1+x^2 = (t-x)^2 \ (= t^2 - 2tx + x^2)$ a tedy

$$x = \frac{t^2-1}{2t} \quad (t>0)$$

tj. $\varphi(t) = \dfrac{t^2-1}{2t}$ a $\varphi'(t) = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right) = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{t^2+1}{t^2}$

a pak „počítáme" $\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\, dt$ –

– k tomu jistě vyjádříme $\sqrt{1+x^2} = t - x = t - \frac{t^2-1}{2t} = \frac{t^2+1}{2t}$

a tedy máme: $\int \frac{2t}{t^2+1}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{t^2+1}{t^2}\, dt = \int \frac{1}{t}\, dt = \ln|t| + c \quad (t>0)$,
$\equiv G(t)$ (dle věty)

tedy $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx \left(= G(\varphi^{-1}(x)) + c\right) = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + c$, $x\in\mathbb{R}$

(Konec)

(2) Výpočet primitivní funkce „kombinací" metody per partes a substituce (nebo v obráceném pořadí):

1. $\int e^{\sqrt{x}}\, dx = ?$
$x \in (0,+\infty)$

užijeme substituci (zkusíme „v opačném směru") $\sqrt{x} = t \Leftrightarrow x = t^2 \left(\equiv \varphi(t)\right)$ a
$\varphi'(t) = 2t$,

tedy hledáme $\left(\int f(g(t)).g'(t)dt\right)$

$$\int e^t . 2t\,dt \underset{PP}{=} \left|\begin{matrix} u' = e^t, & u = e^t \\ v = t, & v' = 1\end{matrix}\right| = 2\left(te^t - \int e^t dt\right) =$$
$$= 2\left(te^t - e^t\right) + c \quad (\equiv G(t)),$$

pak $\int e^{\sqrt{x}}\, dx = 2\left(\sqrt{x}-1\right).e^{\sqrt{x}} + c$, $x\in(0,+\infty)$
$(t=\sqrt{x})$

2. $\underline{\int \frac{1}{x^2}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)dx} = -\int \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)' dx \left(\overset{*}{=} G\left(\frac{1}{x}\right)+C\right)$

$= \underline{\frac{1}{x}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + C}$, $x\in(-\infty,0)$ nebo $x\in(0,+\infty)$

dle věty o substituci integrujeme nejprve funkci ($g(x)=\frac{1}{x}$), tj.:

$$\int \operatorname{arctg} y\,dy \underset{pp.}{=} \left| \begin{matrix} f'_{(y)}=1 & f_{(y)}=y \\ g_{(y)}=\operatorname{arctg} y, & g'_{(y)}=\frac{1}{1+y^2}\end{matrix}\right| = y\operatorname{arctg} y - \int \frac{y}{1+y^2}\,dy$$

$$= y\operatorname{arctg} y - \frac{1}{2}\ln(1+y^2)+C, \quad \left(\int\frac{y}{1+y^2}dy = \frac{1}{2}\int\frac{2y}{1+y^2}dy = \frac{1}{2}\int\frac{g'(y)}{g(y)}dy\right)$$

(tedy opět k (*)) $\equiv G(y)$

3. $\underbrace{\int\sqrt{1-x^2}\,dx}_{x\in(-1,1)} \underset{\substack{pp\\ \text{(zatím)}}}{=} \left|\begin{matrix} f'=1, & f=x\\ g=\sqrt{1-x^2}, & g'=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\end{matrix}\right| =$

$$= x\sqrt{1-x^2} + \int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\sqrt{1-x^2} - \int\left(\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx =$$

$= x\sqrt{1-x^2} - \int\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$, tj. máme rovnici pro hledaný integrál, tj.:

$2\int\sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x + C$, a pak

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right)+C, \quad x\in(-1,1)$$

(výsledek se shoduje s výpočtem užitím substituce $x=\sin t$)

3. $$\underline{\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx} \quad \left(= G(\varphi^{-1}(x))\right) = \underline{2\left(\sqrt{x} - \sqrt{1-x}\cdot\arcsin\sqrt{x}\right) + C}$$

$x \in (0,1)$
(ve cvičení 10 – pp)

substituce $\sqrt{x} = t$
pak $x = t^2 \;(\equiv \varphi(t))$
a $\varphi'(t) = 2t$

nebo formálně: $\left(\left|\begin{array}{l}\sqrt{x} = t\\ x = t^2\\ dx = 2t\,dt\end{array}\right|\right)$,

řešíme tedy $$\int \frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}\cdot 2t\,dt = 2\int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\cdot \arcsin t\,dt \underset{pp}{=}$$

$$\left|\begin{array}{ll} f' = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}, & f = -\sqrt{1-t^2} \;\; (VS)\\ g = \arcsin t, & g' = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\end{array}\right| = 2\left(-\sqrt{1-t^2}\cdot\arcsin t + \int dt\right) =$$

$$= 2\left(t - \sqrt{1-t^2}\arcsin t\right) + C \quad \left(\equiv G(t)\right)$$

4. $$\underline{\int \sqrt{1+x^2}\,dx} \underset{pp}{=} \left|\begin{array}{ll} f' = 1, & f = x\\ g = \sqrt{1+x^2}, & g' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\end{array}\right| =$$

$$= x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = x\sqrt{1+x^2} - \int\left(\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx$$

$$= x\sqrt{1+x^2} - \int\sqrt{x^2+1}\,dx + \int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx,$$

tedy (opět rovnice pro hledaný integrál):

$$\int\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx\right) =$$

$$= \underline{\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right) + C}$$

(příklad 2. z první části – tedy substituce)

③ Integrace parciálních zlomků

a) $$\int \frac{1}{(x-a)^n}\,dx = \begin{cases} \ln|x-a| + C & \text{pro } n=1 \\ \dfrac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C, & n \neq 1 \end{cases}$$

1. $$\int \frac{1}{(x+3)^3}\,dx = \int (x+3)^{-3}\,dx = \frac{(x+3)^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2}\frac{1}{(x+3)^2} + C$$

$x \in (-\infty, -3)$, $x \in (-3, +\infty)$

(zde jsem použila „vzorec" (říkám „škorobaká")

(*) $\int f(ax+b)\,dx = \dfrac{F(ax+b)}{a} + C$, je-li $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ v (α, β))

(v odpovídajících intervalech)

nebo, pokud bruce dáte přednost, lze použít i substituci:

$$\int \frac{1}{(x+3)^3}\,dx = \int \frac{1}{(x+3)^3}\cdot (x+3)'\,dx = -\frac{1}{2}(x+3)^{-2} + C$$

$$\int \frac{1}{t^3}\,dt = \frac{t^{-2}}{-2} + C$$

2. $\int \dfrac{1}{2-x}\,dx = -\ln|x-2| + C$ (zde opět (*) s $a=-1$, $b=2$)

b) $\int \dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\,dx$, kde $p^2-4q<0$ (tj. jmenovatel nemá reálné kořeny)

($n>1$ – nepovinné, pro „zájemce")

„návod k výpočtu" $I = \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\,dx$ – integrál vyjádříme

jako součet „vhodných" násobků dvou integrálů, které „umíme":

$$I = \overset{?}{c_1} \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,dx + \overset{?}{c_2} \int \frac{1}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right)^n}\,dx$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$c_1 \int \frac{g'(x)}{(g(x))^n}\,dx + c_2 \int \frac{1}{(t^2+1)^n}\,dt$$

---

a příklady:

1. $$\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx = \int \frac{(x^2+4x+5)'}{x^2+4x+5}\,dx = \ln(x^2+4x+5) + C$$

2. $$\int \frac{x-2}{x^2+4x+5}\,dx = c_1 \int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx + c_2 \int \frac{1}{(x+2)^2+1}\,dx$$

$$\parallel$$

$$= c_1 \ln(x^2+4x+5) + c_2 \operatorname{arctg}(x+2) + K$$

– „rada" – „naprogramujeme" si integrály, které „potřebujeme"

a c_1, c_2 – najdeme (snad snadno) – dopočítáme (i zpaměti lze)

zde: $c_1(2x+4) + c_2 = x-2$, tedy $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = -4$

(lze samozřejmě najít c_1, c_2 „zpaměti") tedy, $\underline{\int \frac{x-2}{x^2+4x+5}\,dx} = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx - 4\int \frac{1}{(x+2)^2+1}\,dx =$

$= \underline{\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5) - 4\,\mathrm{arctg}\,(x+2) + K}\ ,\ x \in R$

a podobně:

3. $\underline{\int \frac{2x-1}{x^2+2x+5}\,dx} = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,dx - 3\int \frac{1}{(x+1)^2+4}\,dx =$

$x \in R$

$= \underline{\ln(x^2+2x+5) - \frac{3}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right) + K}$

a $\int \frac{1}{(x+1)^2+4}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\,dt = \frac{1}{4}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right)\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}} + k$

(převedeme na $\int \frac{1}{t^2+1}\,dt$) tj. kde $t = \frac{x+1}{2}$ (buď „zapamatovat" vzorec nebo substituci) $= \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right) + k$

a nepovinně (pro „zájemce")

4. $\underline{\int \frac{x-1}{(x^2+2x+2)^2}\,dx} = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2}\,dx - 2\int \frac{1}{((x+1)^2+1)^2}\,dx$

$x \in R$

a $\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2} = \int \frac{(x^2+2x+2)'}{(x^2+2x+2)^2}\,dx \underset{VS}{=} -\frac{1}{x^2+2x+2} + c$

$\left(VS \rightarrow \int \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t} + c \right)$

$$\int \frac{1}{((x+1)^2+1)^2}\,dx = ?$$

zde „skoro" zahák – nebo se často užívá – ale asi zbytečné –

– 2VS: $x+1 = t$, $x = t-1 \ (\equiv \varphi(t))$, $\varphi'(t) = 1$ (opačně)

nebo $(x+1)' = 1$ a (tedy 1VS „přímo")

$$I_2 = \int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt$$

– poznamenáno bylo na přednášce – integruje se integrál s „exponentem" o 1 menší per partes – – malé v. přednášce vzorec pro I_{n+1})

ukážeme si to jako příklad: (opět jen pro „zájemce")

$$\left(I_1 = \right) \int \frac{1}{t^2+1}\,dt \underset{pp}{=} \left| \begin{array}{ll} f' = 1 & f = t \\ g = \frac{1}{t^2+1}, & g' = \frac{-2t}{(t^2+1)^2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{t}{t^2+1} + 2\int \frac{t^2}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{t}{t^2+1} + 2\left(\int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^2}\,dt - \int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt\right)$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{t^2+1} + \int \frac{1}{t^2+1}\,dt\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{t^2+1} + \operatorname{arctg} t\right) + c$$

tedy,
$$\int \frac{1}{((x+1)^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x^2+2x+2} + \operatorname{arctg}(x+1)\right) + c,$$

a pak

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x^2+2x+2}\right) - \left(\frac{x+1}{x^2+2x+2} + \operatorname{arctg}(x+1)\right) + c$$

$x \in R$

$$\left(= -\frac{1}{2}\left(\frac{2x+3}{x^2+2x+2} + 2\operatorname{arctg}(x+1)\right) + c\right.$$

(4) Integrály racionálních funkcí („jednodušší")

1. $$\int \frac{3x+9}{(x^2-1)(x+2)}\,dx \quad : \quad x\in(-\infty,-2),\ x\in(-2,-1),\ x\in(-1,1),\ x\in(1,+\infty)$$

návod: 1. krok – zadaná funkce je ryze lomená (st. čitatele < st. jmenovatele), tedy

2. krok – podle rozkladu jmenovatele na lineární činitele (v případě komplexních kořenů nedělíme polynom 2. stupně), tj

zde: $(x^2-1)(x+2) = (x-1)(x+1)(x+2)$

3. krok – rozložíme racionální funkci na t.zv. parciální zlomky (návod v přednášce – z MA1 – z 2.12. nebo i „tabule" na dubu)

$$\frac{3x+9}{(x^2-1)(x+2)} = \frac{3x+9}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} \qquad (*)$$

a pokud nám „nevadí", že ještě nemáme „spočítané" A, B, C, můžeme integrovat:

$$\int \frac{3x+9}{(x^2-1)(x+1)}\,dx = A\int\frac{1}{x-1}\,dx + B\int\frac{1}{x+1}\,dx + C\int\frac{1}{x+2}\,dx =$$

$$= A\ln|x-1| + B\ln|x+1| + C\ln|x+2| + K$$

$$(x \neq \pm 1, 2)$$

A ke 3. kroku – výpočet koeficientů A, B, C v „rozkladu":

z (*) : $$3x+9 = A(x+1)(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x^2-1) \quad (**)$$

(pro $x \neq \pm 1, -2$) : obecně se z této rovnosti dostane soustava lineárních rovnic pro A, B, C, která má (musí) dle algebry právě jedno řešení – neboť rozklad na parciální zlomky lze provést jediným způsobem – a soustava se dostane díky vlastnostem polynomů: dva polynomy se rovnají pro nekonečně mnoho hodnot x, jsou-li identické (tj. mají stejný stupeň a u odpovídajících mocnin mají shodné koeficienty) – toto plyne z toho, že polynom stupně $n \in \mathbb{N}$ má v $\mathbb{R}$ nejvýše n kořenů.

Tedy zde srovnání koeficientů (polynomu $3x+9$ a polynomu s koef. A, B, C)

u x^2: $A + B + C = 0$

u x: $3A + B = 3$

u x^0: $2A - 2B - C = 9$

a odtud: $A = 2,\ B = -3,\ C = 1$

Poznámka: A, B, C lze v případě různých reálných kořenů jmenovatele najít i dosazením bodů $x = \pm 1$ a $x = -2$ do (**) – ze spojitosti polynomů platí i rovnost pro tato x:

$x = 1$: $12 = 6A \Rightarrow A = 2$

$x = -1$: $6 = -2B \Rightarrow B = -3$

$x = -2$: $3 = 3C \Rightarrow C = 1$

Tedy: $$\int \frac{3x+9}{(x^2-1)(x+2)}\,dx = 2\ln|x-1| - 3\ln|x+1| + \ln|x+2| + K, \quad x \neq \pm 1, -2$$

2. <u>Vícenásobný kořen (reálný) jmenovatele:</u>

$$\int \frac{3x^2+2x+2}{x^3-3x-2}\,dx \quad , \text{ f. } x \neq -1,\ x \neq 2$$

rozklad jmenovatele: (např.; lze „uhodnout" kořen $x=-1$)

$$x^3-3x-2 = x^3 - x - (2x+2) = x(x^2-1) - 2(x+1) =$$
$$= (x+1)(x^2-x-2) = (x+1)(x+1)(x-2)$$
$$= (x+1)^2(x-2)$$

tj. $x=-1$ je dvojnásobný kořen jmenovatele – pak návod pro rozklad je:

$$\frac{3x^2+2x+2}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-2} \qquad \Big|\ (x+1)^2(x-2)$$

a jistě zopakuji výpočet A, B, C:

$$(*) \quad 3x^2+2x+2 = A(x+1)(x-2) + B(x-2) + C(x+1)^2, \quad x \neq -1, 2$$

srovnání koeficientů:

u x^2: $A + C = 3$ a odtud: $A=1,\ B=-1,\ C=2$

u x: $-A+B+2C = 2$

u x^0: $-2A-2B+C = 2$

(lze též „dosadit" do (*) $x=-1,\ x=2$ a pak třeba $x=0$ – – opět jednodušší soustava rovnic)

Tedy máme:

$$\int \frac{3x^2+2x+2}{x^3-3x-2}\,dx = \int \frac{1}{x+1}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx + 2\int \frac{1}{x-2}\,dx =$$

$$= \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + 2\ln|x-2| + K, \quad x \neq -1, 2$$

3. jmenovatel má i kořeny komplexní:

$$\int \frac{5x^2+2x+3}{(x-1)(x^2+2x+2)}\,dx$$ – $x \neq 1$ a návod pro rozklad na parciální zlomky je:

$$\frac{5x^2+2x+3}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$$

a integraci už „umíme" (i bez vypočítaných A, B, C):

$$\int \frac{5x^2+2x+3}{(x-1)(x^2+2x+2)}\,dx = A\cdot\int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}\,dx =$$

$$= A\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{B}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx + (C-B)\int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx$$

$$= A\ln|x-1| + \frac{B}{2}\ln(x^2+2x+2) + (C-B)\,\mathrm{arctg}(x+1) + K,$$

$x \in (-\infty, 1)$ nebo $x \in (1, +\infty)$.

A analogickým „vyřešením" jako v příkladech 1,2 dostaneme

$A = 2$, $B = 3$, $C = 1$,

b)

$$\int \frac{5x^2+2x+3}{(x-1)(x^2+2x+2)}\,dx = 2\ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+2) - 2\,\mathrm{arctg}\,(x+1) + K$$

$K \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$

Poznámka: chtěla jsem zde jen ukázat (tím, že jsem integrovala dříve, než jsme „měli" A, B, C, podstatu výpočtu integrálu, nezávisle na hodnotách A, B, C; můžete to udělat i obráceně, nejdříve najít A, B, C, tj. zde a rozložit a pak integrovat už s hodnotami A, B, C:

$$\int \frac{5x^2+2x+3}{(x-1)(x^2+2x+2)}\,dx = 2\int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{3x+1}{x^2+2x+2}\,dx =$$

(dále) dle „návodu"

$$= 2\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx - 2\int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx =$$

$$= 2\ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+2) - 2\,\mathrm{arctg}\,(x+1) + K$$

4. $I = \int \frac{x^3+x^2-2x-10}{x^3+4x^2+5x}\,dx$ – zde není funkce ryze lomená, tedy před „rozkladem" na parciální zlomky je třeba „vydělit":

$$= \int \left(1 - \frac{3x^2+7x+10}{x(x^2+4x+5)}\right)dx = x - \int \frac{3x^2+7x+10}{x(x^2+4x+5)}\,dx$$

a $\displaystyle\int \frac{3x^2+7x+10}{x(x^2+4x+5)}\,dx \underset{\text{rozklad}}{=} \int \frac{A}{x}\,dx + \int \frac{Bx+C}{x^2+4x+5}\,dx =$

(už ryze lomená fce)

a výpočet koeficientů (zkuste sami zkontrolovat ten nej- -je snad dosazení (už), atd.):

$A = 2,\quad B = 1,\quad C = -1,$ tj.

$$= 2\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{x-1}{x^2+4x+5}\,dx = 2\ln|x| + \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx -$$

$$- 3\int \frac{1}{(x+2)^2+1}\,dx = 2\ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5) - 3\,\mathrm{arctg}(x+2) + K,$$

tedy $\underline{I} = x - \left(2\ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5) - 3\,\mathrm{arctg}(x+2)\right) + K,$

$x \in (-\infty, 0),\ x \in (0, +\infty)$

a prosím, pokud najdete někde chyby, napište!

Snad tyto řešené příklady integrování „trochu" pomohou, další příklady – substituce, vedoucí k integraci racionální funkce, jistě připravím:

$\displaystyle\int \frac{1}{e^{2x}+2e^x+2}\cdot e^x\,dx$; $\displaystyle\int \frac{1}{e^{2x}+e^x-2}\,dx$; $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x(\ln x-1)(\ln^2 x-2\ln x+2)}\,dx$;

$\displaystyle\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}\,dx$; $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx$; $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}\,dx$ a několik dalších;

a prosím, ptejte se, pokud budete něco potřebovat vyjasnit.